Психология. Журнал Высшей школы экономики,
2013. Т. 10. № 4. С. 5–38.

*Теоретико-эмпирические исследования*

# НОВЫЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ МЫСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

**В.Ф. СПИРИДОНОВ**

Спиридонов Владимир Феликсович — заведующий центром когнитивных исследований РАНХИГС, главный научный сотрудник лаборатории когнитивных исследований НИУ ВШЭ, доктор психологических наук.
Область исследовательских интересов: психология решения задач и проблем, онтогенетическое, функциональное и профессиональное развитие мыслительных процессов, когнитивные механизмы языка и сознания. Автор более 120 теоретических и экспериментальных работ по указанным проблемам.
Контакты: vfspiridonov@yandex.ru

**Резюме**

*В статье рассматриваются современные методические тенденции развития психологии мышления. Обсуждаются ограничения существующих методов изучения мыслительных процессов. На примере трех разноплановых исследований предлагаются новые методы изучения процесса решения мыслительных задач, которые позволяют анализировать центральную структуру этого процесса — репрезентацию задачи решателем.*

***Ключевые слова:*** *мыслительная задача, экспериментальные и неэкспериментальные методы изучения процесса решения задач, репрезентация мыслительной задачи в ходе решения.*

Заметное продвижение в любой области исследований связано в равной степени с двумя обстоятельствами: выдвижением «хороших проблем», ответы на которые обеспечат существенный теоретический прогресс или создадут основу для важных практических приложений, и появлением «хороших методов» исследования (Ньюэлл, Саймон, 1965).

Одновременное сочетание этих двух факторов — настолько нечастое явление, что в психологической литературе оно даже носит несколько неожиданное в данном контексте название «свадьбы» (Gardner, 1985).

Если взглянуть с указанной точки зрения на состояние дел в современной психологии мышления, то можно без труда обнаружить существенную диссоциацию между обсуждаемыми в ней теоретическими проблемами и методами, с помощью которых происходит поиск решений. На протяжении десятилетий эта область знания была источником увлекательных исследовательских вопросов (напомню несколько классических работ такого рода: Выготский, 1982; Джемс, 1991; Кюльпе, 1914; Леви-Брюль, 1930). При этом разработка адекватных эмпирических методов очевидным образом не поспевала за развитием теоретических идей. Скажем, известный метод «рассуждения вслух» (reflexion parlée), предложенный Э. Клапаредом и К. Дункером в 1910-1920-е гг. (Claparède, 1917; Duncker, 1926), получил окончательное оформление лишь в 1950-е гг. в работах Г. Саймона и А. Ньюэлла (Newell, Simon, 1961), т.е. его «доводка» заняла без малого 30 лет. В целом такое же положение сохраняется и по сей день (обзор основных методов, используемых для изучения процесса решения мыслительных задач человеком, см.: Спиридонов, 2006а). Однако за последние годы наметились некоторые позитивные изменения, связанные не в последнюю очередь с методическими заимствованиями из других разделов психологии или сопредельных наук.

Основное методическое затруднение исследований мышления заключается в непосредственной недоступности ни исследователю, ни самому решателю[1] в ходе мыслительного процесса — репрезентации задачи, а также ее изменений, приводящих к успеху. Все известные методы исследования пытаются восполнить этот пробел, так или иначе объективируя процесс решения, делая его «видимым» (иногда в буквальном смысле слова). Однако традиционные методы (рассуждения вслух, задач и подсказки) обладают существенными ограничениями. Именно на их преодоление направлены модификации исследовательских процедур, которые обсуждаются в этой статье. Описанные в ней исследования демонстрируют возможности новых экспериментальных и неэкспериментальных методов для решения классических вопросов: классификации проблемных ситуаций, переноса способа решения задачи и описания полной структуры решения. Показательно, что все предлагаемые новации использованы по отношению к одному типу проблемных ситуаций.

Трудности построения классификации мыслительных задач, в конечном счете, сводятся к тому, что любые «объективные» характеристики проблемных ситуаций — количество или особенности формулировки условий, их материал, количество возможных

[1] Решатель — человек или животное, решающие задачу или проблему в ходе психологического эксперимента или в естественных условиях.

решений и др. — не могут служить надежными основаниями для разделения задач на группы, поскольку легко оказываются вне «поля зрения» испытуемого в ходе решения, т.е. вне его репрезентации задачи. Аналогично, показатели трудности решения (затраченное время или процент успехов) оказываются недостаточными. Представляется, что адекватное решение проблемы лежит на пути комбинирования разноплановых методов: с помощью анализа задач (например, по структурным признакам) разрабатывается их классификация, а затем проводится ее эмпирическая проверка, учитывающая тем или иным образом репрезентацию задач в ходе решения.

В данном исследовании мы реализовали предложенную двухшаговую схему исследования. Для эмпирической верификации классификации проблемных ситуаций по структурным признакам был использован модифицированный метод «Да-Нет», изначально разработанный в рамках теории обнаружения сигнала для анализа перцептивных явлений. Предложенная процедура позволяет оценить способность испытуемых обнаружить изменения структуры алгебраической задачи, не решая ее. Варьируя компетентность испытуемых, можно нащупать границы между разными типами проблемных ситуаций, используя успешность оценки решаемости структурно полных и неполных задач в качестве критерия различения. При этом данный метод направлен на анализ репрезентации решателями отдельных структурных элементов задачи, допуская их систематическое варьирование в эксперименте, с чем не справляются более традиционные методы. Предложенная процедура характеризуется вполне удовлетворительной валидностью (Спиридонов, 2006б).

Недостаток известных методов изучения переноса способа решения задачи, в свою очередь, связан с использованием в подавляющем большинстве экспериментов всего двух локальных проблемных ситуаций. Такой метод чрезвычайно затрудняет как работу испытуемого (обе предъявленные ему задачи содержат огромное количество «шумовых» элементов, затрудняющих процедуру переноса, которые невозможно отсечь, имея всего один целевой пример), так и работу исследователя (сам перенос в таких условиях становится исчезающе редким явлением).

Мы модифицировали традиционный метод задач, перейдя от использования изолированных проблемных ситуаций к их «семействам», т.е. к наборам задач, упорядоченным по структурным признакам. Это позволяет от изучения локального переноса (когда принцип решения однократно переносится с базовой задачи на целевую) перейти к анализу систематического переноса (когда сходные принципы решения последовательно переносятся с одной задачи на другую). Подобный методический прием «втягивает» в исследование целые предметные области (представленные проблемными ситуациями), позволяя определить степень обобщенности способа решения, т.е. широту его успешного применения по отношению к последовательно усложняющимся задачам.

Варьируя структурные особенности задач в эксперименте, мы также получаем возможность изучения репрезентации решателя, фиксируя, какие варьируемые свойства способствуют переносу, а какие — нет.

Выявление структуры решения наталкивается на весьма ограниченный характер экспериментальных протоколов, куда попадает лишь малая часть возможных ответов — только те, которые обнаруживают испытуемые в ходе решения. Такая ситуация связана с понятными ограничениями опыта и наличного уровня знаний любого конкретного решателя или их группы. Не менее важным оказывается и в определенной мере случайная репрезентация решаемой задачи, возникающая в зависимости от множества ситуативных факторов.

Для анализа полной структуры решения мы адаптировали распространенный в языкознании метод построения парадигм, который направлен на изучение строения сложных системных объектов. Он позволяет отобрать и упорядочить все корректные уравнения, с помощью которых решается данная текстовая задача по алгебре. В плане психологического анализа данный метод способен фиксировать различные репрезентации задачи решателями, оценивать частоту их появления, а также обеспечивать выявление и интерпретацию разнотипных ошибок решения исходя из единых объяснительных принципов.

Настоящая статья направлена на то, чтобы на примере конкретных экспериментальных исследований продемонстрировать возможности, открываемые новыми методами для решения классических проблем (классификация проблемных ситуаций, перенос способа решения задачи и описание полной структуры решения) и тем самым приблизить счастливый момент продуктивного равновесия решаемых проблем и исследовательских методов в психологии мышления.

## Классификация проблемных ситуаций

Разбиение множества задач на группы в соответствии с какими-либо психологически фундированными принципами — одна из самых старых проблем, сформулированных в рамках психологии мышления. Конечно, задачи классифицируются не только в этой области знания. Однако, «хорошие» способы группировки задач, к которым стремятся психологи, устроены так, что отнесение проблемной ситуации к тому или иному классу предопределяет (или подсказывает) способ решения (Пойа, 1976). Несмотря на весьма обширный список предложенных классификаций (см., например: Матюшкин, 1972; Минский, 1967; Фридман, 1977; Metcalfe, Wiebe, 1987), данная проблема далека от окончательного разрешения. Особенно сложной она оказывается, когда возникает необходимость классификации близких по материалу и структуре задач.

В качестве весьма неудобного для традиционных способов систематизации, но весьма актуального объекта рассмотрим одну из разновидностей учебных задач — текстовые задачи по алгебре. Это один из видов хорошо определенных, закрытых проблемных ситуаций[2], которые находят широкое применение в школьной практике. Несмотря на то что подобные задачи чрезвычайно разнолики по своим психологическим особенностям, в литературе доминируют чисто предметные (задачи «на движение», «на смеси и сплавы» и т.п.) или формальные («на составление уравнений и их систем») их классификации, что не позволяет оценить ни сложность проблемных ситуаций для решения, ни степень их реального сходства/различия, ни суть затруднений, которые испытывают решатели. Поскольку данный вид задач будет использован во всех трех описанных ниже исследованиях, охарактеризуем его несколько подробнее.

Понятие *функции* $y = f(x)$[3] играет ключевую роль в структуре таких проблемных ситуаций (по крайней мере, в пределах школьной программы)[4]. Этот конструкт выступает как способ организации и представления содержания задачи. В условии текстовых задач по алгебре можно обнаружить, по крайней мере, одну связанную пару одноименных величин (иногда больше), которые не определены количественно и выражены одна через другую и не могут быть непосредственно вычислены. Скажем, в задаче *«На автостоянке находятся машины — автомобили и мотороллеры. У них вместе 100 колес и 40 рулей. Сколько тех и других машин?»* такой парой является соотношение между количеством мотороллеров ($x$) и количеством автомобилей ($40 - x$). Собственно, это и есть «минимальная» функция (*здесь:* $y = 40 - x$). Мы будем называть ее *функциональной связкой*. Она используется в ходе решения для определения значений элементов проблемной ситуации. Из подобных и более сложных связок и конструируется уравнение, с помощью которого решается задача. В более сложном случае в состав связки могут входить не целые величины, а доли, заданные по отношению к некоторому целому (например, *первый рабочий, работая отдельно, может выполнить всю работу на 5 ч. скорее, чем второй рабочий, если последний будет работать отдельно. Тогда производительность второго рабочего = 1/(x+5), если x — время работы первого из них*).

Полное уравнение также является функцией, но зафиксированной в более крупном масштабе: меньшие конструкции «вложены» в нее. Поскольку в уравнении его левая и правая части приравнены друг к другу,

---

[2] В работе (Спиридонов, 2006а) их предлагалось называть *регулярными*, так как структура таких задач содержит регулярности определенного рода, что в значительной мере задает особенности процесса решения, а также варианты ошибок, которые делают учащиеся.

[3] Функция – соответствие $y = f(x)$ между переменными величинами, в силу которого каждому рассматриваемому значению некоторой величины $x$ (аргумента, или независимой переменной) соответствует определенное значение другой величины $y$ (зависимой переменной, или функции).

[4] Понятно, что в учебные задачи данное понятие предусмотрительно «вкладывается» ее авторами.

при его составлении параметры задачи должны быть связаны между собой соответствующим образом. Кроме того, искомое должно быть определено в условии задачи, по крайней мере, дважды *разными* способами (в приведенном примере это сделано через сумму колес и сумму рулей). Только в таком случае в задаче имеется объективное основание для составления уравнения. По сути, эта конструкция, взятая целиком, представляет собой равновесную группировку операций, впервые описанную Ж. Пиаже (Пиаже, 1969) на другом материале. К текстовым задачам по алгебре такой способ анализа, насколько мне известно, не применялся.

Помимо функциональных связок в условии задачи могут присутствовать и количественно определенные величины (скажем, *скорость поезда 40 км/ч*).

Анализ структуры текстовых алгебраических задач, входящих в школьную программу, позволяет выделить несколько их разновидностей. Хотя формулировка каждой из них содержит все необходимые и достаточные условия, соотношение количественно определенных величин и связок изменяется. Так, удается различить два типа «линейных» и два типа «квадратных»[5] задач. (Конечно, в реальности разновидностей текстовых алгебраических задач больше.) Как видно из таблицы 1, происходит постепенное изменение структуры: первый тип линейных задач (первая строка таблицы) содержит численные значения и хотя бы одну функциональную связку. Второй тип содержит лишь связки. Третий тип опять содержит и числа и связки; четвертый — только связки. Кроме того, последний тип несет в себе не только числовые показатели, но и доли (подробнее см.: Спиридонов, 2006б). В связи с особенностями их структуры второй и четвертый тип иногда называют «вырожденными». Схемы также демонстрируют, что разница между линейными и квадратными задачами задается *структурно*: в первых функциональная связка относится лишь к одному параметру (например, задает одну через другую скорости двух машин), а в квадратных — к двум (например, в третьей строке они связывают между собой две скорости и два времени соответственно). В таблице 1 алгебраические задачи представлены в соответствии с нарастанием их структурной сложности, т.е. сочетанием количественно определенных величин и функциональных связок.

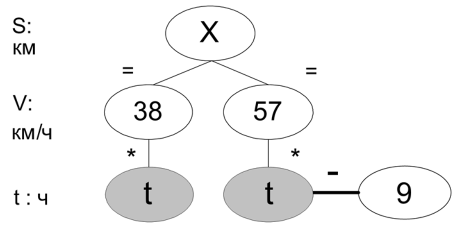
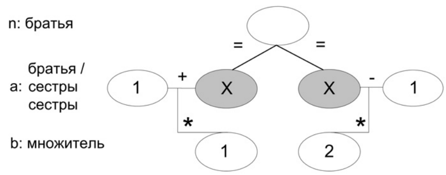
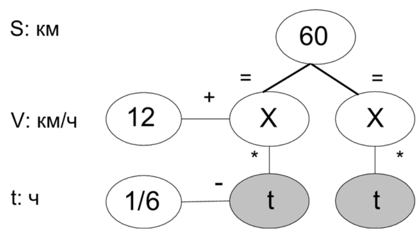
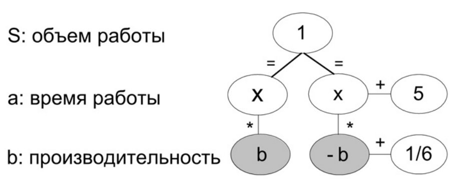
Все текстовые алгебраические задачи отличаются своей структурой от более простых задач (их можно назвать *текстовыми арифметическими*), в которых функциональные связки отсутствуют. Соответственно, составление уравнения в таком случае является излишним, да и невозможным.

Проведенная серия экспериментов была направлена на эмпирическую проверку предложенной классификации. Мы предположили, что если описанные в таблице 1 типы

[5] «Линейные» задачи решаются путем составления линейного уравнения, «квадратные» — квадратного.

*Таблица 1*

**Типы текстовых алгебраических задач (1, 2 — линейные, 3,4 — квадратные)**

<table>
<tr><th>Условия задачи</th><th>Название типа</th><th>Алгебраическая схема* (серым окрашены функциональные связки)</th></tr>
<tr><td>1) Две грузовые машины выехали из пункта А в пункт В. Скорость одной машины 38 км/ч, а другой 57 км/ч. Первая вышла со станции А на 9 часов раньше второй, но обе машины одновременно достигли пункта В. Чему равно расстояние между пунктами А и В?</td><td>Линейная задача</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2) У мальчика столько сестер, сколько братьев, а у его родной сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько всего детей в этой семье?</td><td>Линейная вырожденная задача</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3) На середине пути между станциями А и В поезд был задержан на 10 мин. Чтобы прибыть в В по расписанию, машинисту пришлось увеличить первоначальную скорость на 12 км/ч. Найти первоначальную скорость, если известно, что расстояние между станциями 120 км.</td><td>Квадратная задача</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4) Двое рабочих, работая вместе, выполнили некоторую работу за 6 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 5 ч. скорее, чем второй рабочий, если последний будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу?</td><td>Квадратная вырожденная задача</td><td>
</td></tr>
</table>

---

* Подобный способ описания структуры алгебраической задачи подробно анализируется в работе: Weaver, Kintsch, 1992. В отечественной школьной практике с аналогичной целью используется табличная форма представления соотношений решаемой алгебраической задачи.

задач действительно психологически отличаются друг от друга, то можно эмпирически обнаружить ситуацию, когда испытуемые будут демонстрировать различную успешность при определении решаемости/нерешаемости алгебраических задач, относящихся к разным строкам таблицы 1. По мере повышения компетенции количество освоенных типов задач, с которыми испытуемые безошибочно справляются (т.е. верно определяют решаемость полных задач и нерешаемость неполных), должно закономерно увеличиваться в соответствии с порядком, представленным в таблице 1. Этот же эффект должен наблюдаться, если мы введем какие-либо осложняющие процесс угадывания условия (например, временны́е ограничения). Таким образом, если мы обнаружим отсутствие статистически значимых расхождений в успешности для какого-то типа задач в одной группе испытуемых и наличие таковых у другой менее компетентной группы решателей или в условиях временно́го прессинга, это будет явным свидетельством реального существования описанных типов текстовых задач по алгебре.

### *Материал, методы и процедура исследования*

В эксперименте приняли участие две группы испытуемых. Первую составили учащиеся 7–9-х классов нескольких подмосковных школ в возрасте 13—15 лет (численность 57 человек), вторую — студенты-физики 1-го курса Московского физико-технического института в возрасте 17–18 лет (численность 48 человек).

Было использовано 13 текстовых алгебраических задач всех четырех описанных выше типов, извлеченных из сборников заданий для учеников старших классов средней школы. Часть проблемных ситуаций каждого типа была модифицирована. Задача могла быть полной, т.е. допускать составление корректного уравнения или их системы, либо неполной — когда у нее было удалено одно из условий (одна функциональная связка); в этом случае она становилась объективно нерешаемой[6]. В одном случае из квадратной задачи исключалось условие, позволяющее приравнять две части уравнения. Еще одной модификацией служили полные и неполные квадратные задачи, в условии которых все количественные данные были заменены латинскими буквами («задачи с параметрами»).

Для данной серии экспериментов был модифицирован метод «Да-Нет», исходно разработанный в рамках ТОС для изучения критериев принятия решения в перцептивных задачах (интерпретацию его возможных исходов см. в таблице 2). Данная методика введена в исследовательскую практику психологов мышления Б. Рехдером (Rehder, 1999).

[6] Например, скорость товарного поезда 38 км в час, а пассажирского 57 км в час. Первый вышел со станции А **на 7 часов** раньше второго, но второй обогнал его и пришел на станцию В двумя часами раньше. Каково расстояние между городами? Жирным шрифтом выделена функциональная связка, которая могла отсутствовать в условии.

*Таблица 2*

**Матрица исходов эксперимента по методу «Да-Нет»**

| | | **Полная задача** | **Неполная задача (без одной функциональной связки)** |
|---|---|---|---|
| **Ответ испытуемого** | *«Решается»* | Попадание | Ложная тревога |
| | *«Не решается»* | Пропуск | Верное отрицание |

Были сформулированы следующие экспериментальные гипотезы:

*1. Для каждого выделенного типа текстовых алгебраических задач найдутся условия (испытуемые определенной компетенции, временны́е ограничения), при которых будут выявлены различия в успешности определения их решаемости/нерешаемости.*

*2. Увеличение успешности определения решаемости/нерешаемости типов алгебраических задач происходит в соответствии с нарастанием структурной сложности задач, т.е. в описанном выше порядке.*

Эксперимент проводился фронтально. Испытуемые сначала решали две полные алгебраические задачи: линейную и квадратную. Так диагностировалось умение участников решать подобные задачи и фиксировалось время, необходимое для этого. Затем с помощью проектора на экране предъявлялись по одной следующие 11 алгебраических задач с инструкцией определить, решается данная задача или нет, т.е. может ли быть для нее составлено корректное уравнение. Свой ответ испытуемые должны были записать на листе бумаги. Набор задач и порядок их предъявления был одинаковым для всех групп. Время предъявления для школьников: 90 сек — для линейных задач и 120 сек — для квадратных. Выборка студентов была случайным образом поделена пополам. Время предъявления задач первой группе студентов совпадало с указанным выше, а для второй группы было: 60 сек — для линейных задач и 90 сек — для квадратных. Во всех случаях этот отрезок времени был на 25% короче, чем самое быстрое правильное решение первых двух задач испытуемыми.

## *Результаты и обсуждение*

Количество правильных ответов по каждому типу задач в рамках каждой из групп испытуемых — а) школьники, б) студенты с «коротким» временем предъявления, в) студенты с «длинным» временем предъявления — сравнивалось между собой с помощью критерия МакНимара (см. таблицы 3–5)[7].

Полученные результаты позволили выделить несколько психологически

[7] Набор стандартных показателей, который обычно рассчитывается по результатам метода «Да-Нет» (d' — мера чувствительности, c — значение критерия принятия решения, β — отношение правдоподобия), в данном случае избыточно информативен, поскольку направлен на анализ стратегий, которые используют испытуемые. Прямое сравнение частот правильных ответов позволяет непосредственно проверить сформулированные выше гипотезы.

*Таблица 3*

**Успешность определения решаемости разнотипных линейных задач (% правильных ответов и уровень значимости *p* критерия МакНимара)**

| **Задачи** | **Линейная** | **Линейная неполная** | **Линейная вырожденная** | **Линейная вырожденная неполная** |
|---|---|---|---|---|
| | *Студенты: «длинное» предъявление* | | | |
| **%** | 100 | 90 | 100 | 95 |
| **Линейная** | | – | – | – |
| **Линейная вырожденная** | | | | – |
| | *Студенты: «короткое» предъявление* | | | |
| **%** | 79 | 79 | 71 | 79 |
| **Линейная** | | – | – | – |
| **Линейная вырожденная** | | | | – |
| | *Школьники* | | | |
| **%** | 77.2 | 64.9 | 59.6 | 91.2 |
| **Линейная** | | – | 0.07 | 0.06 |
| **Линейная вырожденная** | | | | 0.001 |

различающихся типов текстовых алгебраических задач. Как мы и предполагали, школьники обнаружили статистически значимые различия в количестве правильных ответов даже при сравнении разных типов линейных задач. Хорошо справляясь с оценкой решаемости линейной задачи и ее модификации, они допускали значимо большее количество ошибок при оценке линейных вырожденных задач: различие между полными и неполными задачами статистически значимое. Это позволяет говорить о реальной психологической дистанции между линейными и линейными вырожденными задачами, различия между которыми отчетливо выражены на определенном этапе развития умения решать алгебраические текстовые задачи.

Не менее характерные результаты получены на квадратных задачах. Школьники продемонстрировали наличие статистически значимых различий (или тенденции к их возникновению)[8] практически между

[8] Значения $0.05 < p < 0.1$ не позволяют принять гипотезу о наличии статистически значимых различий между выборочными средними, но свидетельствуют о наличии тенденции к таким различиям.

*Таблица 4*

**Успешность определения решаемости разнотипных квадратных задач (% правильных ответов и уровень значимости *p* критерия МакНимара)**

| **Задачи** | **Квадратная** | **Квадратная неполная** | **Квадратная вырожденная** | **Квадратная вырожденная неполная** | **Квадратная без «равно»** |
|---|---|---|---|---|---|
| | *Студенты: «длинное» предъявление* | | | | |
| % | 90 | 95 | 75 | 100 | 40 |
| **Квадратная** | | – | – | – | 0.006 |
| **Квадратная вырожденная** | | | | – | 0.065 |
| **Квадратная вырожденная неполная** | | | | | 0.001 |
| | *Студенты: «короткое» предъявление* | | | | |
| % | 96 | 50 | 75 | 86 | 54 |
| **Квадратная** | | 0.001 | 0.07 | – | 0.0001 |
| **Квадратная вырожденная** | | | | – | – |
| **Квадратная вырожденная неполная** | | | | | 0.04 |
| | *Школьники* | | | | |
| % | 82.5 | 66.7 | 45.6 | 73.7 | 22.8 |
| **Квадратная** | | 0.09 | 0.0001 | – | 0.00001 |
| **Квадратная вырожденная** | | | | 0.009 | 0.015 |
| **Квадратная вырожденная неполная** | | | | | 0.00001 |

всеми анализируемыми случаями. Структура полученных данных позволяет заключить о неосвоенности квадратных и квадратных вырожденных задач данной группой испытуемых.

Группа студентов с «длинным» временем предъявления, наоборот, справилась со всеми сравнениями, кроме одного (о нем ниже). Весьма интересно, что студенты, выполнявшие задания в условиях «короткого»

*Таблица 5*

**Успешность определения решаемости квадратных задач с параметром (% правильных ответов и уровень значимости *p* критерия МакНимара)**

| **Задачи** | **Квадратная** | **Квадратная неполная** | **Квадратная с параметром** | **Квадратная с параметром неполная** |
|---|---|---|---|---|
| | *Студенты: «длинное» предъявление* | | | |
| % | 90 | 95 | 80 | 100 |
| **Квадратная** | | – | – | – |
| **Квадратная с параметром** | | | | – |
| | *Студенты: «короткое» предъявление* | | | |
| % | 96 | 50 | 89 | 100 |
| **Квадратная** | | 0.001 | – | – |
| **Квадратная с параметром** | | | | – |
| | *Школьники* | | | |
| % | 82.5 | 66.7 | 84.2 | 80.7 |
| **Квадратная** | | 0.09 | – | – |
| **Квадратная с параметром** | | | | – |

времени, показали результаты более близкие к школьникам. У этой группы также появились статистически значимые различия между разными вариантами квадратных задач. Этот факт может свидетельствовать в пользу того, что умения обнаруживать структуру таких проблемных ситуаций сформировались *позже* навыков работы с линейными задачами и еще не окончательно устоялись. В ситуации временны́х ограничений они оказываются достаточно уязвимыми.

Интересный результат связан с задачей с пропущенным условием, обеспечивающим приравнивание частей уравнения друг к другу (в таблицах она обозначена как «квадратная без “равно”»), которая оказалась наиболее трудной для всех групп испытуемых. Можно предположить, что ее сложность обеспечивается максимальным сходством с полной квадратной задачей, поскольку все функциональные связки (связывающие две скорости и два времени соответственно), на которые можно ориентироваться, имеются в наличии, что, по-видимому, дезориентирует испытуемых. Подобный результат служит аргументом в пользу единства психологических механизмов у испытуемых разной степени компетентности, ответственных за анализ условий текстовых задач по алгебре.

Использование квадратных задач с параметрами позволило проконтролировать важную побочную переменную: давая ответы, испытуемые могли ориентироваться на объем численной информации, присутствующей в условии, а не на те особенности задач, которые являлись предметом экспериментального варьирования[9]. Сохранив структуру проблемных ситуаций при полном исключении количественных показателей, удалось показать, что именно изучаемые особенности задач являются определяющими. Выяснилось, что решаемость квадратных задач с параметрами оценивалась всеми группами испытуемых так же успешно, как и полных квадратных задач. А структура результатов в целом свидетельствует о том, что подобные задачи оказались даже проще с точки зрения определения их решаемости/нерешаемости.

Полученные данные свидетельствуют в пользу реального существования четырех типов текстовых задач по алгебре, выделенных посредством теоретического анализа. Они также выступают аргументом в пользу того, что выявленные структурные составляющие задачи (числовые данные и особенно функциональные связки), положенные в основание проверяемой классификации, могут быть интерпретированы как элементы репрезентации задачи испытуемым в ходе успешного решения.

Таким образом, модифицировав метод «Да-Нет», исходно разработанный в рамках ТОС для анализа восприятия, мы смогли произвести эмпирическую верификацию предложенной классификации проблемных ситуаций и различить алгебраически близкие задачи. Предложенная процедура характеризуется высокой разрешающей способностью и вполне удовлетворительной валидностью (Спиридонов, 2006б).

## Перенос найденного способа решения задачи

Еще одна классическая проблема психологии мышления — перенос найденного способа решения на последующие задачи. При всей несомненности названного феномена его детерминанты совсем неочевидны, а общее теоретическое объяснение отсутствует.

Наиболее последовательное и узкое («структурное») определение переноса принадлежит гештальтпсихологам: это использование найденного способа решения для структурно подобной задачи (Вертгеймер, 1987; Келер, 1930). С такой точки зрения, основой переноса выступает сходное строение проблемных ситуаций. Однако за 90 с небольшим лет исследований было обнаружено большое число факторов, влияющих на эффективность переноса (обзор см. в: Спиридонов, 2006а), при этом они оказались столь разноплановыми, что сделали сомнительным единство самого феномена и его связь со

[9] Исключение функциональной связки автоматически уменьшает количество чисел в условии задачи.

структурой решаемых задач. Не в последнюю очередь такое положение обусловлено значимым методическим пробелом: экспериментальные исследования центрировались на работе с изолированными проблемными ситуациями. В этом случае перенос оказывается максимально затруднен, поскольку для анализа строения задач при их парном сравнении явно не хватает материала и различить случайные и ключевые элементы структуры оказывается весьма непросто.

Известно очень небольшое количество экспериментальных примеров, которые связаны с использованием упорядоченного набора однотипных или закономерно изменяющихся проблемных ситуаций. Обычно такой исследовательский прием ведет к получению нетривиальных результатов. Так, в работах А. Лачинса (Luchins, 1942; Luchins, Luchins, 1950) была показана чрезвычайная устойчивость навыков, формирующихся в ходе решения набора однотипных мыслительных задач; в статье К. Котовского, Дж. Хейса и Г. Саймона (Kotovsky et al., 1985) продемонстрирован феномен различной трудности для решения изоморфных (т.е. полностью структурно идентичных) задач и выявлены некоторые факторы, объясняющие такое положение дел[10], а в исследовании Я.А. Пономарева (Пономарев, 1958) обнаружен сильный положительный перенос, при котором, несмотря на последовательное усложнение однотипных задач, после обнаружения испытуемым принципа решения они начинали решаться с первой попытки.

Представляется интересным исследовать процессы переноса в ситуации решения набора структурно близких задач, поскольку их совокупность позволяет подвергнуть анализу структурные факторы переноса. Подобную группу однотипных проблемных ситуаций, упорядоченных в соответствии с нарастающей структурной сложностью (см. таблицу 1), мы будем называть «семейством» задач. С помощью такого семейства можно моделировать и предъявлять решателям целые предметные области или их существенные фрагменты.

Вторая серия экспериментов была направлена на изучение процессов переноса способа решения на материале семейства текстовых алгебраических задач. Для нее с опорой на цитированное исследование Я.А. Пономарева была разработана специальная процедура, основная идея которой состоит в следующем: задачи, упорядоченные в соответствии с нарастанием их структурной сложности, будут решаться более успешно, чем те же задачи, предъявленные в ином порядке. Порядок и структурное сходство задач в рамках семейства будут «подсказывать» определенный способ решения, который за счет переноса с одной задачи на другую и обеспечит более высокую успешность.

Заметим, что границы подобного положительного переноса должны быть независимы от алгебраической

[10] Здесь однотипные задачи систематически использовались в *разных* экспериментальных сериях одного исследования.

формы проблемных ситуаций. Компетентный решатель должен осуществить перенос между задачами независимо от их алгебраической формы: поскольку как линейные, так и квадратные задачи допускают возможность корректной организации своего содержания посредством той или иной функции $y = f(x)$. Алгебраическая форма задачи оказывается здесь более слабым свойством, чем ее структурные особенности.

Были выдвинуты следующие экспериментальные гипотезы.

*1. Текстовые задачи по алгебре, предъявленные для решения в соответствии с нарастанием их структурной сложности, будут решаться более успешно по сравнению с иным порядком предъявления тех же задач.*

*2. Этот прямой порядок предъявления алгебраических задач, принадлежащих одному семейству, обеспечит и перенос успешного способа решения между линейными и квадратными задачами.*

### *Материал и процедура исследования*

В этой серии экспериментов приняли участие контрастные по уровню своей математической подготовки группы испытуемых. Первую, «малокомпетентную» группу составили учащиеся 7–9-х классов нескольких подмосковных среднеобразовательных школ (n = 91). «Компетентными» испытуемыми выступили учащиеся 8-х классов элитной математической школы г. Москвы (n = 46).

Для первой группы были использованы 5 текстовых алгебраических задач, которые с учетом результатов первой серии составили семейство задач «на движение». Все они были извлечены из сборников дополнительных заданий для учеников 7–8-х классов средней школы. Порядок их предъявления определялся структурной сложностью их условий (в заданном выше смысле). Задачи № 1–3 относились к линейным, № 4–5 — к квадратным[11].

Для второй группы мы усложнили набор задач: № 1, 2 относились к линейным, № 3, 4 — к квадратным, № 5 — к «вырожденным квадратным». Задачи также составляли семейство задач «на движение», и порядок их предъявления определялся структурной сложностью их условий.

Эксперимент проводился фронтально. Испытуемым в письменной форме предлагались текстовые алгебраические задачи с инструкцией решать в предъявленном порядке. Все школьники случайным образом делились пополам. Первая половина решали задачи в прямом порядке от № 1 до № 5. Вторая половина «малокомпетентных» испытуемых получали задачи в следующем порядке: 5, 1, 4, 3, 2; а вторая половина компетентных испытуемых — 3, 1, 4 ,2, 5. Такой порядок был принят, чтобы критическая для проверки второй гипотезы задача № 3 (первая в наборе из числа квадратных задач) располагалась в начале ряда, что гарантировало высокую мотивацию испытуемых

[11] Вырожденных линейных задач на материале движения в доступных нам сборниках задач мы не обнаружили.

при ее решении и существенное количество времени, которое они могли ей уделить.

### *Результаты и обсуждение*

Полученные результаты представлены на рисунках 1 и 2.

Дисперсионный анализ не выявил влияния прямого порядка предъявления задач на успешность их решения. Однако мы обнаружили значимое влияние порядка на успех решения отдельных задач. Так, задачи № 2 и 3 (линейные) решались «малокомпетентными» испытуемыми при предъявлении в прямом порядке значимо успешнее (критерий $\chi^2$, в обоих случаях $p$ = 0.001 (односторонний)), а «компетентные «испытуемые при прямом порядке предъявления решали значимо успешнее квадратную задачу № 3 (критерий $\chi^2$, $p$ < 0.05 (односторонний)).

Таким образом, вторая гипотеза подтвердилась на выборке «компетентных» испытуемых. При этом оказалось, что влияние порядка предъявления на успешность решения имеет локальный характер, затрагивая лишь некоторые задачи, входящие в семейство: данный феномен распространяется на успешность решения линейных задач «малокомпетентными» испытуемыми и первой квадратной — «компетентными». Этот результат и показательные различия в успешности решения линейных и квадратных задач двумя группами испытуемых позволяют по-новому взглянуть на теоретические дискуссии о феномене переноса.

Как показывают полученные данные, структурные особенности задач лежат в основе положительного переноса, обеспечивая значимый прирост правильных решений. Однако те или иные структурные факторы оказываются действенными только применительно к определенному уровню компетентности испытуемых. Этот эффект становится заметным лишь

*Рисунок 1*

**Успешность решения текстовых алгебраических задач при двух разных порядках предъявления «малокомпетентными» испытуемыми**

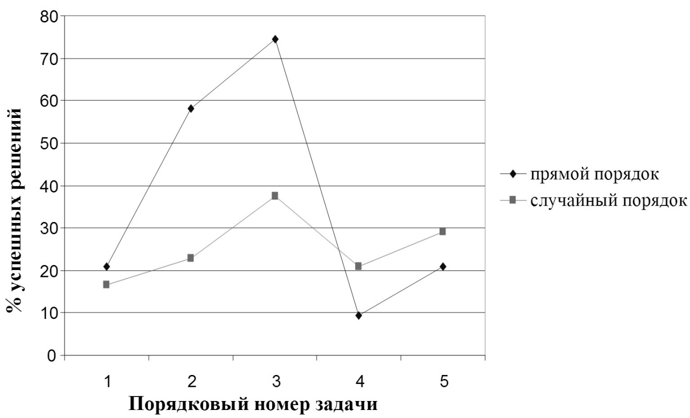
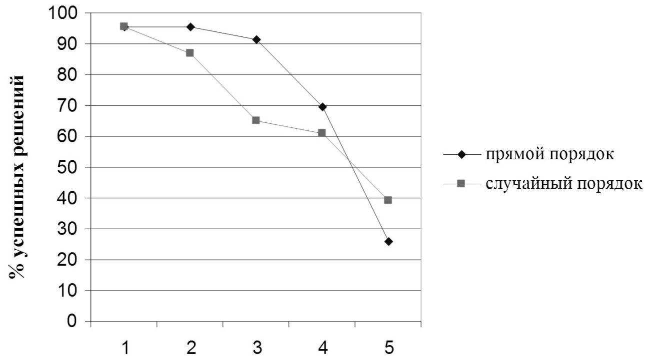


*Рисунок 2*

**Успешность решения текстовых алгебраических задач при двух разных порядках предъявления «компетентными» испытуемыми**




при использовании в экспериментах семейства алгебраических задач: при применении задач, не усложнявшихся в ходе исследования (как в работе А. Лачинса) или усложнявшихся неочевидным для испытуемых образом (как в работе Г. Саймона с коллегами), он не мог быть обнаружен.

Подобная поправка на компетентность испытуемых означает, что обсуждаемый эффект должен проявляться при решении классов задач, способы решения которых в данное время лишь осваиваются испытуемыми, не достигая уровня мастерства. Что и было продемонстрировано в данном эксперименте. Дальше в ходе своего развития описанный феномен должен закономерно смениться «эффектом потолка» (подробнее см.: Спиридонов, 2006б). Все сказанное, по-видимому, позволяет утверждать, что на разных уровнях компетентности в основе переноса способа решения лежат различные структурные факторы. Эта гипотеза, безусловно, требует экспериментальной проверки.

Таким образом, модификация метода задач позволила выявить новые факторы положительного переноса у испытуемых различного уровня компетентности.

## Выявление полной структуры решения

Описание процесса решения мыслительной задачи предполагает выявление всех корректных ответов, которые могут быть предложены для ее решения, и их классификацию в соответствии с какими-либо принципами. Таким способом можно раскрыть тот веер возможностей, которые содержатся в условии задачи. Трудность заключается в том, что в экспериментальный протокол попадает лишь небольшая часть происходящего в ходе решения: репрезентация задачи решателем — ее психологическая структура — остается практически скрытой от внешнего наблюдения. Если учесть многообразие возможных ходов решения (особенно в задачах открытого типа), индивидуальные особенности решателей, разноплановые ошибки, которые совершаются ими, и огромное количество случайных условий в самих задачах, становятся понятными сложности анализа репрезентации в каждом конкретном случае (например, сравнение двух индивидуальных репрезентаций одной и той же задачи между собой или двух разных вариантов решения одной и той же задачи). При этом объяснение свойств репрезентации и особенностей ее функционирования – одно из основных направлений изучения процесса решения мыслительной задачи.

Эта исследовательская проблема впервые была поставлена К. Дункером (Duncker, 1926), обратившим внимание на существенное сходство решений, которые предлагались разными испытуемыми в ходе экспериментов. Причем речь шла не о содержательном, а о функциональном сходстве — решения опирались на одни и те же «критические» элементы и связи задачи. К. Дункер предложил способ группировки всех возможных решений, «основанных на понимании», — «родословное дерево» решений задачи. Оно тесно связано со структурой использованных им в исследованиях задач-головоломок: обязательное наличие конфликта и способов его разрешения («функциональных решений» в терминологии К. Дункера). Все полученные в экспериментах реальные решения можно классифицировать по отношению к тому или иному функциональному и таким образом упорядочить их.

К сожалению, подобный способ группировки подходит лишь для узкого круга задач и позволяет систематизировать только некоторые экспериментально полученные, а не все возможные решения. В него нельзя включить «плохие» ошибки (термин В. Келера) — ответы, не учитывающие функциональные отношения решаемой задачи, — равно как и метафорические, фантастические и т.п. решения. Дункеровский способ анализа, опирающийся на родословное дерево решения, не позволяет также дать какое-либо объяснение ошибкам, которые делают испытуемые, но только указать на их природу — не учтенные функциональные отношения задачи.

Еще одна интересная попытка выявления структуры решения была предпринята А. Ньюэллом и Г. Саймоном в рамках их теории «задачного пространства» (Newell, Simon, 1972). Они постулировали, что задача представляет собой два различающихся между собой состояния — исходное и целевое, переход между которыми неизвестен решателю. Оба названных состояния явным образом заданы условиями. Сам процесс решения заключается, таким образом, в поиске пути от одного к другому. Любой из возможных путей связывает крайние точки посредством множества промежуточных состояний. Каждое из них — это репрезентация проблемной ситуации на каком-то шаге решения. Совокупность исходного, целевого, а также возможных промежуточных состояний, которые демонстрируют испытуемые в ходе решения, и носит название задачного пространства. Переход между состояниями обеспечивается специальными процедурами — ментальными операторами. Они задают как разрешенные действия, так и набор запретов, делающих какие-то шаги решателя и, следовательно, часть промежуточных состояний невозможными. Правильный ответ предполагает обнаружение решателем последовательности шагов, переводящих исходное состояние в целевое через ряд разрешенных промежуточных состояний.

По сравнению с предыдущей эта модель значительно полнее описывает и структуру процесса решения, и возможные ошибки, объясняя их возникновение через свойства ментальных операторов и их наличие/отсутствие у решателя, а также особенности промежуточных репрезентаций задачи. Однако задачное пространство можно построить только для тех задач, в которых явным образом задано целевое состояние. Для других видов проблемных ситуаций этот способ анализа подходит в гораздо меньшей степени. (Так, для текстовых задач по алгебре, в которых целевое состояние исходно отсутствует и должно быть выражено через другие условия с помощью уравнения, эта теория кажется не слишком пригодной.) Кроме того, как и в предыдущей модели, группировке здесь поддаются лишь встретившиеся в протоколах, а не все возможные решения. Особенно трудны для анализа сложные задачи, размеры задачного пространства которых явно оказываются в зависимости от компетентности испытуемых, в силу чего риск пропустить возможные ответы весьма велик. Справедливости ради отметим, что выявление полного спектра решений мыслительной задачи не ставилось в качестве цели цитированных выше исследований.

Представляется, что основным недостатком описанных психологических теорий выступает неразработанный язык описания процесса решения задачи, не учитывающий его сложную системную природу. В противовес этому в гуманитарных науках (прежде всего, в языкознании) созданы удобные способы анализа строения непосредственно не представленных исследователю системных объектов. Одним из таких методов — построением парадигмы — удобно воспользоваться в данном случае. Подобное описание вариантов процесса решения текстовой задачи по алгебре позволит упорядочить решения одной и той же проблемной ситуации и сравнить между собой различные задачи.

Понятие парадигмы (*греч.* παραδειγμα — пример, образец) было введено еще в античной грамматике и обозначало упорядоченное описание словоизменительных форм для целых классов лексем (склонений существительных, спряжений глаголов и т.п.)[12]. Ныне так называют любой класс лингвистических единиц, соположенных по какому-то основанию, но при этом закономерным образом противопоставленных

[12] Строгое определение понятия парадигмы и правил ее построения в языкознании можно найти в работе: Зализняк, 2002.

друг другу. Парадигма позволяет не только структурировать анализируемый материал, но и выявить принципы самой этой организации. Парадигматические отношения — отношения единиц в системе языка — противополагаются синтагматическим, возникающим между единицами в речи или тексте, т.е. в ходе использования данной знаковой системы. Принципиально, что из всех возможностей, которые содержит парадигма, в конкретном случае реализуется лишь одна (скажем, каждое существительное в этой фразе стоит только в одном падеже).

Для полноценного описания сложных объектов типа естественного языка, имеющего многоуровневое строение, единственной парадигмы недостаточно: устройство каждого структурного уровня описывается с помощью множества парадигм, выявляющих систематический характер правил изменения и сочетания знаков и других единиц. С этой целью построены разноплановые фонетические, морфологические, синтаксические и т.д. парадигмы.

Обоснованием применения аналогичного метода в нашем случае служат следующие соображения. Процесс решения текстовой задачи по алгебре организован как построение *вторичной моделирующей системы* (Спиридонов, 2006а,б). Это полноценная знаковая система; она не присутствует в готовом виде до его начала и может не возникнуть в его ходе — тогда решение останется ненайденным. Решатель образовывает вторичные значения ключевых аспектов задачи — они постепенно оказываются увязанными в единую структуру и определенными друг через друга. Понятно, что вся эта конструкция получается до некоторой степени условной — опирающейся на определенные допущения (например, возьмем за $x$ расстояние между городами А и Б). Собственно, в таком построении и заключается важный шаг к решению — оно также оказывается заданным в рамках появляющейся взаимосвязанной системы значений. Это обеспечивает решателя ориентирами для дальнейшего движения: возникающая система все строже и последовательнее определяет и «подсказывает» допустимые способы действия, помогая различать осмысленные и ошибочные шаги. Таким образом, моделирующая система создает условия для построения задачного пространства, постепенно достраивая его недостающие элементы (в первую очередь, цель). Однако ее жесткости (особенно на ранних стадиях процесса решения), конечно же, недостаточно, чтобы вообще избежать ошибок.

Важно заметить, что в протоколы решения попадает лишь часть этой знаковой системы — ограниченное число из множества возможных решений и путей к ним. (Собственно, в этом и состоит одна из основных причин неполноты задачного пространства, построенного по результатам любого эксперимента.) Аналогия с противопоставлением языка и речи (Ф. де Соссюр) оказывается здесь очень уместной. Опираясь на вторичную моделирующую систему, решатель находит одно решение (или весьма ограниченное их число); остальные остаются нереализованными. Знаковая система лишь частично проявляется в решении (как язык в речи). Ее системный характер остается незаметным и может быть выявлен лишь с помощью специальных методов: например, через построение парадигмы, которая, таким образом, четко будет указывать на системное строение процесса решения.

Если в явном виде сформулировать принципы варьирования единиц, составляющих систему, то мы сможем выявить и систематизировать все корректные возможности, которые содержатся в условии задачи, а не только те, которые попали в экспериментальные протоколы. Таким образом, открывается путь к раскрытию полной психологической структуры задачи, не ограниченной рамками способностей или осведомленности решателей. Парадигма включает в себя и упорядочивает все корректные уравнения, с помощью которых можно решить данную текстовую алгебраическую задачу. Она также позволяет сопоставить структуру различных алгебраических задач между собой в силу общности структурных элементов подобных проблемных ситуаций — числовых показателей и функциональных связок.

Однако психологические теории К. Дункера и Г. Саймона и А. Ньюэлла, обрисованные выше, обладают важной общей чертой — они раскрывают психологическую структуру задачи, т.е. в отличие от традиционных лингвистических парадигм имеют подчеркнуто *репрезентационный* характер. Таким образом, предлагаемое нами парадигматическое описание также с необходимостью должно фиксировать репрезентацию задачи решателем. Представляется, что проще всего этой цели можно достичь за счет предметной интерпретации решений текстовой алгебраической задачи, т.е. уравнений и их составных частей. Это значит, что все алгебраические выражения должны быть истолкованы в терминах условий конкретной задачи, для которой они составлены.

Поскольку количество алгебраически корректных уравнений для одной задачи чрезвычайно велико, необходимо сформулировать правила отбора психологически «осмысленных» вариантов, которые будут включены в парадигму. В качестве таковых можно предложить следующие.

1. Из множества алгебраически эквивалентных вариантов записи одного и того же уравнения для парадигмы выбирается одна (за тем исключением, которое зафиксировано в п. 4).

2. Каждое уравнение, отбираемое для парадигмы, обязательно имеет предметную интерпретацию[13]. Она фиксируется высказыванием, описывающим левую и правую части уравнения в терминах условий задачи (например, уравнение задачи на движение может иметь форму: «расстояние между А и Б = расстояние между А и Б»). Этим обеспечивается репрезентационный характер каждого из уравнений, составляющих парадигму.

3. Одно предметное высказывание может соответствовать более чем одному уравнению, которые в таком случае

[13] В работе (Зализняк, 2002) аналогичное явление названо собственно номинативным значением словоформы.

выступают равноценными вариантами одного и того же паттерна отношений задачи (например, $vt$ (т.е. скорость умножить на время))[14].

4. Для составления уравнений последовательно используются все функциональные связки, т.е. отношения между парами (или группами) соответствующих элементов в условии задачи. Они записываются с помощью арифметических операций, причем каждая связка получает максимально возможное количество форм записи. Все они используются для составления уравнений[15].

5. Применительно к некоторым задачам отдельные формы записи функциональных связок и, следовательно, уравнения оказываются невозможными[16].

6. Для каждого уравнения выделяются группировки операций, выражающие и фиксирующие отношения между условиями задачи. Это те условия, которые необходимо учесть при составлении уравнения.

7. С целью обеспечения наглядности уравнению может быть сопоставлено его графическое отображение. Для этого используются алгебраические схемы (см. выше). Взаимнооднозначное отношение между уравнением и схемой отсутствует: как одно уравнение может соответствовать нескольким алгебраическим схемам, так и одна схема – нескольким уравнениям.

8. Уравнения строятся с помощью умножения, деления, сложения или вычитания условий задачи. В рамках алгебраической схемы эти группы условий организованы либо по «вертикали» (например, $s/v$), либо по «горизонтали» (например, $vt$). «Диагональное» применение схем запрещено[17].

9. При составлении уравнений используются только те количественные данные, которые непосредственно представлены в условии задачи.

В качестве примера приведем построенную в соответствии с изложенными принципами парадигму для задачи № 1 из таблицы 1. Таблица 6 содержит полную структуру решения данной текстовой алгебраической задачи.

Построив парадигмы для используемых в экспериментах задач этого типа, мы получаем инструмент, который существенно увеличивает количество информации, извлекаемой из протоколов решения. Возможности количественного и качественного анализа полной структуры решения, которые связаны с таким теоретическим описанием, можно проиллюстрировать следующими примерами.

---

[14] В работе (Зализняк, 2002) явление, аналогичное набору уравнений, обладающих одинаковой предметной интерпретацией, обозначено как список словоформ с одним собственно номинативным значением. Они составляют одну лексему.

[15] Строго говоря, именно этот набор различных записей одной и той же функциональной связки и заслуживает названия парадигмы.

[16] В терминологии А.А. Зализняка подобные парадигмы называются «дефектными».

[17] Пример «вертикального» применения схемы Кинча для задачи № 1 из таблицы 1: $s/v_1 = s/v_2 + 9$. Пример «горизонтального» использования схемы для той же задачи: $v_1t_1 = v_2(t_1 - 9)$. Пример алгебраически корректного, но запрещенного «диагонального» уравнения: $38/(x - 9) = 57/x$.

*Таблица 6*

**Пример парадигмы текстовой алгебраической задачи**

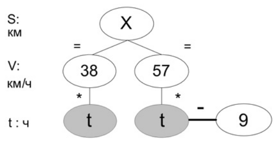
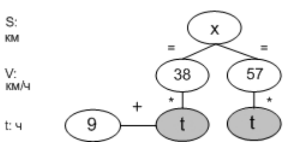
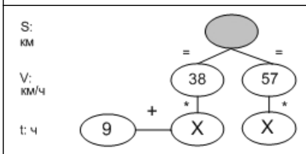
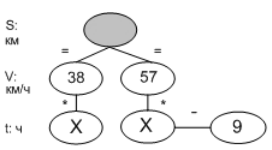
| | | |
|---|---|---|
| ***Условия задачи:***<br>Две грузовые машины выехали из пункта А в пункт В. Скорость одной машины 38 км/ч, а другой 57 км/ч. Первая вышла со станции А на 9 часов раньше второй, но обе машины одновременно достигли пункта В. Чему равно расстояние между пунктами А и В?<br>а) в условии задачи 3 неопределенных величины. При этом:<br>б) два времени движения определены друг через друга (функциональная связка);<br>в) две скорости движения определены количественно. | | |
| **Алгебраическая схема** | **Группировки операций** | **Парадигма (пронумерованные уравнения, выделенные жирным шрифтом) и соответствующие им предметные интерпретации** |
| | | *Паттерн: s/v* |
|  | $t_1 = t_2 + 9$ или $s/v_1 = s/v_2 + 9$ | **1) x/38 = (x/57) + 9, x =1026 км**<br>Время1 = Время2 + 9 ч |
|  | $t_1 - 9 = t_2$ или $s/v_1 - 9 = s/v_2$ | **2) (x/38) − 9 = x/57**<br>Время1 − 9 ч = Время2 |
| | $t_1 - t_2 = 9$ или $s/v_1 - s/v_2 = 9$ | **3) x/38 − (x/57) = 9**<br>Время1 − Время2 = 9 ч |
| | | *Паттерн: vt* |
|  | 1) $t_1 - 9 = t_2$<br>2) $v_2t_2 = v_1(t_2 + 9) = s$ | **4) 57x = 38(x+9), x = 18 ч**<br>Расстояние = Расстояние |
|  | 1) $t_1 - 9 = t_2$<br>2) $v_1t_1 = v_2(t_1 - 9) = s$ | **5) 38x = 57(x − 9), x = 27 ч**<br>Расстояние = Расстояние |
| | | *Паттерн: v/v* |
| | 1) $t_1 - 9 = t_2$<br>2) $v_1/v_2 = t_2/t_1$ | **6) 57/38 = (x + 9)/x**<br>Отношение скоростей = обратному отношению времен |

*Таблица 6 (окончание)*

| Алгебраическая схема | Группировки операций | Парадигма (пронумерованные уравнения, выделенные жирным шрифтом) и соответствующие им предметные интерпретации |
|---|---|---|
| | 1) $t_1 - 9 = t_2$<br>2) $v_2/v_1 = t_1/t_2$ | **7) 38/57 = x/(x + 9)**<br>Отношение скоростей = обратному отношению времен |
| | 1) $t_1 - 9 = t_2$<br>2) $v_1/v_2 = t_2/t_1$ | **8) 57/38 = x/ (x – 9)**<br>Отношение скоростей = обратному отношению времен |
| | 1) $t_1 - 9 = t_2$<br>2) $v_2/v_1 = t_1/t_2$ | **9) 38/57 = (x – 9)/x**<br>Отношение скоростей = обратному отношению времен |
| Можно также построить множество «противозаконных» уравнений. Например: 1) 38/(x – 9)=57/x; 2) (x – 9)/38 = = x/57; 3) 57 / (x + 9) = 38/x; 4) (x + 9)/ 57 = x/38; 5) ((x/57) + 9)/x/38 = 1; 6) x/38/((x/57) + 9) = 1 и т.д. Однако все они исключены по правилам построения парадигмы. | | Всего: 9 уравнений |

*Материал и процедура исследования*

В ходе исследования испытуемые (учащиеся 7–9-х классов двух московских математических школ; n = 219) фронтально решали наборы текстовых алгебраических задач, упорядоченных либо в соответствии со структурной сложностью их условий (в заданном выше смысле) (группы 1, 3, 5), либо в квазислучайном порядке (группы 2, 4, 6)[18]. В первом случае анализируемая задача № 1 предъявлялась на первом месте, во втором — ее место в ряду систематически варьировалось (что, как было показано в предыдущей серии экспериментов, значимо влияет на успешность решения некоторых задач в ряду). Затем из экспериментальных протоколов мы выделили все составленные испытуемыми корректные уравнения; их общее количество оказалось равно 180.

*Результаты и обсуждение*

Рассмотрим частоту полученных правильных решений в рамках

[18] Ученики одной из школ принимали участие в двух исследованиях: группы 1 и 2 в 2006 г., а группы 3 и 4 в 2009 г.

предложенной парадигмы (см. таблицу 7)[19]. Проведенный анализ выявил несколько характерных моментов.

1. Так, было обнаружено 8 решений, не входящих в построенную парадигму; причем только четыре из этих уравнений (2.2%) относилось к числу исключенных по правилам построения. Остальные были системами уравнений, которые в данном случае лежат за пределами нашего анализа. Таким образом, построенная парадигма упорядочивает более 95% полученных в экспериментах правильных решений.

2. Приведенное распределение правильных ответов обладает определенной устойчивостью и не подвержено влиянию порядка решения задач. Несмотря на некоторые колебания частоты встречаемости уравнений, все различия (между шестью группами испытуемых, двумя школами и двумя частями выборки, решавшими анализируемую задачу, имевшую разный порядковый номер в ряду других задач) по критерию $\chi^2$ статистически незначимы. Дополнительные свидетельства в пользу устойчивости используемых испытуемыми способов решения текстовой алгебраической задачи представлены в одной из наших предыдущих работ (Спиридонов, 2011).

3. Полученные частоты уравнений сильно отличаются друг от друга. Так, частота уравнения № 4 превосходит все остальные на высоком уровне статистической значимости — в четырех группах из шести (в 1, 4, 5 и 6) (биномиальный критерий, $p < 0.01$) и в рамках всей выборки (биномиальный критерий, $p < 0.001$).

4. Также сильно разнятся частоты появления паттернов, лежащих в основании уравнений: соотношение vt (уравнения 4 и 5) встречается статистически значимо чаще, чем s/v (уравнения 1, 2 и 3) (биномиальный критерий, $p < 0.001$). При этом уравнения, опирающиеся на соотношение v/v (или t/t), не появились в протоколах ни разу.

Таким образом, можно утверждать, что предложенная парадигма позволяет упорядочить бóльшую часть полученных в экспериментах правильных решений. Эта процедура, в свою очередь, выявляет доминирующую репрезентацию задачи в ходе решения. Легко видеть, что значимое большинство решателей из всех существующих возможностей воспользовались отношением «Расстояние = Расстояние» для организации условий задачи и нахождения ответа.

Объяснением такого положения дел могут служить весьма разноплановые соображения: от существования общих для всех отечественных общеобразовательных школ способов обучения решению алгебраических задач до наличия более «доступных» уравнений и от разной степени освоенности арифметических операций испытуемыми (если, скажем, умножение психологически «проще», чем деление) до ограничений во владении решателями алгебраической записью. Понятно, что в

[19] Приведенные данные взяты из работ (Спиридонов, 2006б, 2011), где также описаны подробности использованных экспериментальных методик.

*Таблица 7*

**Частота корректных решений задачи № 1 (n = 172)**

| Парадигмальные уравнения | Частота | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Группа 1 (n = 36) | | Группа 2 (n = 25) | | Группа 3 (n = 14) | | Группа 4 (n = 36) | | Группа 5 (n = 18) | | Группа 6 (n = 43) | |
| 1) x/38 = (x/57) + 9,<br>Время1 = Время2 + 9 ч | 2 | 5.50% | 2 | 8% | 0 | 0% | 4 | 11.10% | 1 | 5.50% | 3 | 6.90% |
| 2) (x/38) − 9 = x/57,<br>Время1 − 9 ч = Время2 | 2 | 5.50% | 2 | 8% | 3 | 21.40% | 1 | 2.70% | 0 | 0% | 2 | 4.60% |
| 3) x/38 − (x/57) = 9,<br>Время1 − Время2 = 9 ч | 0 | 0% | 2 | 8% | 1 | 7.10% | 0 | 0% | 1 | 5.50% | 1 | 2.30% |
| 4) 57x = 38(x + 9),<br>Расстояние = Расстояние | 25 | 69.40% | 12 | 48% | 8 | 57.10% | 26 | 72.20% | 16 | 89% | 27 | 62.90% |
| 5) 38x = 57(x − 9),<br>Расстояние = Расстояние | 7 | 19.60% | 7 | 28% | 2 | 14.30% | 5 | 13.90% | 0 | 0 | 10 | 23.20% |
| 6) 57/ 38 = (x + 9)/x,<br>Отношение скоростей = обратному отношению времен | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| 7) 38/57 = x/(x + 9),<br>Отношение скоростей = отношению времен | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| 8) 57/38 = x/(x − 9),<br>Отношение скоростей = отношению времен | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | |
| 9) 38/57 = (x − 9)/x,<br>Отношение скоростей = отношению времен | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | |

целом эти гипотезы не противоречат друг другу, причем возможны и другие объяснения; все они требуют экспериментальной проверки.

### *Анализ ошибок испытуемых*

Еще одним примером эффективности парадигмы как аналитического инструмента может служить анализ ошибок испытуемых.

Парадигма позволяет из всего многообразия погрешностей, которые встречаются в протоколах решения, выделить ошибки *построения* уравнений, отличив их от всех прочих (например, арифметических или ошибок преобразования уравнений). Этого удается достичь за счет выявления применительно к каждому уравнению группировки операций, которые фиксируют функциональные связки задачи, присутствующие в условии. Предполагается, что, составляя то или иное корректное уравнение, решатель использует набор (группировку) соответствующих операций, причем именно тех, которые были зафиксированы в парадигме. Основания анализа ошибок, таким образом, заключаются во вскрытии системы отношений задачи, которые выражаются уравнением. Таким образом, парадигма, определяя способы структурного анализа уравнений, открывает путь и к психологическому анализу ошибок, которые могут возникнуть при их построении.

Любое (даже самое простое) уравнение с необходимостью требует записи одного и того же набора отношений задачи *двумя* разными способами с помощью *двух* разных наборов операций. Например, в уравнении № 4 из таблицы 6 предполагается, что расстояние между пунктами А и Б будет выражено через произведение времен и скоростей и первой, и второй машины, причем скорости в условии заданы количественно, а отношение между временами — функциональной связкой $x + 9$ или $x - 9$. По сути, эта конструкция, взятая целиком, представляет собой равновесную группировку операций, впервые описанную Ж. Пиаже (Пиаже, 1969) на другом материале. Именно нарушение или неполный учет операций, входящих в группировку, и лежат в основании ошибок составления уравнения. К текстовым алгебраическим задачам такой способ анализа, насколько нам известно, не применялся.

### *Результаты и обсуждение*

Мы проанализировали ошибки составления уравнений при решении анализируемой в этой статье задачи, полученные в предыдущем исследовании, добавив к ним результаты учащихся 7–9-х классов нескольких средних общеобразовательных школ, расположенных в Алтайском крае, Московской области и городах Москва и Барнаул ($n = 334$)[20]. Таким образом, мы сформировали две подгруппы различной компетентности в решении текстовых алгебраических задач: а) учащиеся специальных

[20] Мы выражаем глубокую благодарность Г.С. Авдеевой, которая провела эмпирическую часть этого исследования в школах Алтайского края и г. Барнаул.

математических школ и б) ученики районных средних школ. Успешность решения анализируемой в этой статье задачи в названных подгруппах значимо различалась (критерий $\chi^2$; подгруппа 1 > подгруппа 2, $p < 0.0001$). Интересно, что связь между возрастом или количеством лет изучения алгебры и успешностью решения текстовых задач отсутствует: семиклассники из специализированной математической школы более успешны, чем семи-, восьми или девятиклассники из обычных школ (во всех трех случаях критерий $\chi^2$; $p < 0.01$).

Отталкиваясь от приведенных в таблице 6 группировок операций, мы классифицировали встретившиеся в протоколах ошибки следующим образом.

1. *Доалгебраические ошибки* — попытки выразить отношения задачи исключительно средствами арифметики, не прибегая к составлению уравнения.

1.1. Решение задачи с помощью операций, которые фиксируют не все необходимые для решения отношения задачи или фиксируют их в искаженном виде (например, 38*9 = 342; 38*6 + 342 = 570 км или 38 + 9 + 57 = x).

1.2. Решение задачи с применением операций, фиксирующих отношения задачи более высокого порядка, чем требуется для составления уравнения (например, можно вычислить дистанцию между машинами через 9 часов пути, а затем, найдя разницу скоростей, узнать, через сколько часов вторая машина догонит первую)[21].

2. *Алгебраические ошибки* — разноплановые ошибки составления уравнений.

2.1. Тавтологии — построение уравнения с использованием в обеих его частях лишь одного набора операций; например, $(x - 9)*38 = 38x - 342$.

2.2. Ошибка в использовании функциональной связки x ± 9.

2.2.1. Ошибка в порядке операций; например, $38x + 9 = 57x$;

2.2.2. Удвоение функциональной связки $x \pm 9$; например, $38/(x - 9) + 57/(x+9) = x$;

2.3. Ошибка сочетания составляющих уравнения[22]; например, $38x = 57(x + 9)$.

2.4 Ошибка в функциональных связках $S = v*t$; например, $x + x - 9 = 38 + 57$ или $x/57 = x + 342$.

2.5. Отказ от правильно составленного уравнения — зачеркивание верно

[21] Этот тип решений был отнесен к ошибочным только потому, что испытуемые получали инструкцию решить задачу с помощью уравнения. Понятно, что подобный способ решения не может быть учтен в таблицах 6 и 7.

[22] Легко видеть, что сочетание составляющих уравнения (частей, имеющих предметную интерпретацию по отношению к условиям задачи) не является произвольным. Для того чтобы приравнивание правой и левой частей состоялось, необходимо уравновесить величину одних элементов уравнения другими. Например, если левая часть уравнения записана как 38x, то правая должна быть 57(x − 9), поскольку 57 > 38, и содержимое скобок в правой части должно компенсировать эту разницу. Запись правой части как 57(x + 9) закономерно является ошибкой, так как ее невозможно скомпенсировать какими бы то ни было преобразованиями другой части уравнения. Возможные и «запрещенные» варианты задаются правилами сочетания составляющих уравнения.

составленного уравнения после неудачной попытки его решить;

2.6. Ошибки приравнивания вне связок, указанных выше; например, $38x + 57(x - 9) = S$ или $(x - 342)/38 + 9 = (x - 342)/57 + 6$.

Частота встречаемости ошибок в двух названных группах испытуемых приведена в таблице 8. Несмотря на всю условность количественного распределения ошибок, сводная таблица иллюстрирует несколько интересных особенностей, характерных для испытуемых разной степени компетентности. Так, общее количество ошибок значимо меньше в «компетентной» группе решателей (критерий $\chi^2$, $p < 0.0001$), у них же значимо меньше и доалгебраических ошибок (критерий $\chi^2$, $p < 0.0001$), при этом в количестве алгебраических ошибок значимых различий нет. Однако доля алгебраических ошибок значимо

*Таблица 8*

**Частота разных типов ошибок решения текстовой задачи по алгебре (обсуждение см. в тексте)**

| **Типы ошибок** | **Сильные решатели (ученики матшкол) n = 219** | **Слабые решатели (ученики районных школ) n = 334** |
|---|---|---|
| | | |
| 1.1. Решение задачи с помощью арифметических операций | 6 | 93 |
| 1.2. Решение задачи с применением операций, фиксирующих отношения задачи более высокого порядка | 12 | 4 |
| *2. Алгебраические ошибки* | | |
| 2.1. Тавтологии | 0 | 4 |
| 2.2. Ошибки в использовании функциональной связки $x \pm 9$ | | |
| 2.2.1. Ошибка в порядке операций | 4 | 2 |
| 2.2.2. Удвоение функциональной связки | 1 | 9 |
| 2.3. Ошибка сочетания составляющих уравнения | 20 | 28 |
| 2.4. Ошибка в функциональных связках $S = v^*t$ | 5 | 31 |
| 2.5. Отказ от правильно составленного уравнения | 8 | 4 |
| 2.6. Ошибки приравнивания вне связок, указанных выше | 5 | 3 |

выше у сильных испытуемых. Кроме того, «компетентные» испытуемые значимо чаще совершают ошибку 1.2, т.е. оперируют не расстояниями и скоростями, а более сложными единицами (скажем, разностью скоростей) (критерий $\chi^2$, p<0.01), а «малокомпетентные» значимо чаще ошибаются в функциональных связках в рамках формулы $S = v*t$ (критерий $\chi^2$, $p = 0.001$). При этом количество ошибок при использовании связки $x \pm 9$ в двух группах статистически значимо не различается. Кроме того, представители «компетентной» группы значимо чаще отказываются от самостоятельно правильно составленного уравнения (критерий $\chi^2$, $p = 0.05$).

Необходимо также отметить, что бóльшая часть ошибок в протоколах «компетентной» группы (50% ошибок типа 1.1 и более 70% алгебраических ошибок) была самостоятельно исправлена испытуемыми в ходе решения. У «низкокомпетентной» группы процент исправленных ошибок невысок — менее 7%.

Эти результаты кроме всего прочего позволяют утверждать, что репрезентация алгебраических задач и способы их решения с опорой на группировки операций не слишком свойственны для «низкокомпетентной» группы — отсюда большое количество попыток справиться с этими проблемными ситуациями с помощью непригодного в данном случае арифметического инструментария. Наблюдается также связанное с развитием компетентности нарастание способности к решению текстовых задач по алгебре с помощью группировок операций и навыков исправления собственных ошибок в ходе решения. Однако самый интересный результат, безусловно, связан с неравномерностью развития операций, о чем свидетельствует частота алгебраических ошибок, связанных с различными функциональными связками. При этом значимое большинство ошибок, собранных в таблице 8 (все, кроме строк 2.5 и 2.6, т.е. более 90% от общего количества), может быть объяснено с помощью предложенных принципов анализа.

Таким образом, предложенный метод выявления полной структуры решения позволяет резко увеличить количество информации, извлекаемой из экспериментальных протоколов. Все это открывает возможность существенно более глубокого изучения процессов решения текстовых задач по алгебре (в том числе развития группировок операций, обеспечивающих решение обсуждаемого класса задач, и постепенного перехода к операторному алгебраическому мышлению).

## Общее обсуждение

Состояние дел в психологии мышления характеризуется определенным методическим «голодом»: список известных исследовательских методов не слишком велик, и их не отнесешь к разряду новых (Спиридонов, 2006а). Основное затруднение заключается в непосредственной недоступности ни исследователю, ни самому решателю ключевой структуры в ходе мыслительного процесса — репрезентации задачи, или ее психологической структуры.

Описанные в этой статье экспериментальные и неэкспериментальные процедуры призваны преодолеть этот недостаток, обеспечивая фиксацию тех или иных характеристик репрезентации для последующего анализа. Для объективации процесса решения мыслительной задачи мы использовали разные методические приемы.

Так, предложенная модификация метода «Да-Нет» позволяет за счет варьирования наличия/отсутствия определенных структурных элементов алгебраической задачи убедиться в том, что испытуемые могут определять, решаются ли предъявленные им проблемные ситуации, с опорой именно на эти элементы. В зависимости от роста компетентности испытуемых увеличивается и количество типов задач, с которыми они успешно справляются, т.е. оказываются способными выявлять определенные структурные элементы во все более широком круге проблемных ситуаций. Использование в исследовании задач, организованных в семейства на основе их структурного сходства, позволяет изучать роль тех или иных элементов в переносе найденного способа решения. (Конечно, как и в предыдущем случае, с поправкой на компетентность испытуемых.) А построение парадигмы на основе использования уравнений, имеющих предметную интерпретацию, делает возможным непосредственно оценить частоту появления различных репрезентаций задачи и интерпретировать разнотипные ошибки решения. Во всех случаях мы получаем возможность обоснованно судить об *особенностях репрезентации проблемной ситуации* решателями.

Представляется, что подобное расширение инструментария, принятого в психологии мышления, является трендом развития всей этой области исследований. Суть происходящих изменений — в поиске доступа к процессам, недоступным наблюдению, но опосредующим решение. Репрезентация задачи, безусловно, выступает здесь предметом особого интереса. Теории, претендующие на объяснение механизмов мыслительного процесса, с необходимостью должны учитывать и предсказывать изменения репрезентации по ходу решения. Предлагаемые методические новации, которые обеспечивают расширение возможностей выявления и анализа психологической структуры задачи, ведут к появлению новых эмпирических фактов, исподволь подталкивая и к выдвижению новых объяснительных гипотез. Развитие методов исследования не только вносит вклад в решение классических проблем, но и обеспечивает постановку новых, выступая *катализатором* теоретического и экспериментального изучения психологических механизмов решения мыслительных задач.

## Литература

*Вертгеймер М.* Продуктивное мышление. М., 1987.

*Выготский Л.С.* Мышление и речь // Выготский Л.С. Собрание сочинений. Т. 2. М., 1982.

*Джемс У.* Психология. М., 1991.

*Зализняк А.А.* «Русское именное словоизменение» с приложением избранных работ по современному русскому языку и общему языкознанию. М., 2002.

*Келер В.* Исследование интеллекта человекообразных обезьян. М., 1930.

*Кюльпе О.* Современная психология мышления // Новые идеи в философии. 1914. № 16. С. 75–124.

*Леви-Брюль Л.* Первобытное мышление. М., 1930.

*Матюшкин А.М.* Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М., 1972.

*Минский М.* На пути к созданию искусственного разума // Вычислительные машины и мышление. М., 1967. С. 148–157.

*Ньюэлл А., Саймон Г.А.* Имитация мышления человека с помощью электронно-вычислительной машины. М., 1965. С. 457–474.

*Пиаже Ж.* Избранные произведения. М., 1969.

*Пойа Д.* Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. М., 1976.

*Пономарев Я.А.* Развитие принципа решения задачи // Доклады АПН РСФСР. 1958. № 1.

*Спиридонов В.Ф.* Насколько устойчива психологическая структура текстовой задачи по алгебре? // Психология. Журнал Высшей школы экономики. 2011. Т. 8. № 2. С. 138–147.

*Спиридонов В.Ф.* Психология мышления: решение задач и проблем. М., 2006а.

*Спиридонов В.Ф.* Функциональная организация процесса решения мыслительной задачи: Дисс. ... доктора психологических наук. М., 2006б.

*Фридман Л.М.* Логико-психологический анализ школьных учебных задач. М., 1977.

*Claparède E.* La psychologie de l'intelligence // Scientia. 1917. 11. 353–367.

*Duncker K.* A qualitative (experimental and theoretical) study of productive thinking (solving of comprehensible problems) // Journal of Genetic Psychology. 1926. 33. 642–708.

*Gardner H.* The mind's new science: A history of the cognitive revolution. N.Y.: Basic Books, 1985. Ch. 5. Psychology: The Wedding of Methods to Substance.

*Kotovsky K., Hayes J.R., Simon H.A.* Why are some problems hard? Evidence from the tower of Hanoi // Cognitive Psychology. 1985. 17. 248–294.

*Luchins A.S.* Mechanization in problem solving // Psychological Monographs. 1942. 54. 6. (Whole № 248).

*Luchins A.S., Luchins E.H.* New experimental attempts at preventing mechanization in problem solving // Journal of General Psychology. 1950. 42. 279–297.

*Metcalfe J., Wiebe D.* Intuition in insight and noninsight problem solving // Memory and Cognition. 1987. 15. 3. 238–246.

*Newell A., Simon H.A.* Human problem solving. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1972.

*Newell A., Simon H.A.* The simulation of human thought // Current trends in psychological theory. Pittsburgh University Press, 1961. P. 25–44.

*Rehder B.* Detecting unsolvable algebra word problems // Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition. 1999. 27. 451–469.

*Weaver C.A., Kintsch W.* Enhancing students' comprehension of the conceptual structure of algebra word problems // Journal of Educational Psychology. 1992. 84. 419–428.

## New Research Methods for Problem Solving Process

**Vladimir Spiridonov**
Russian Academy of National Economy and Public Administration
E-mail: vfspiridonov@yandex.ru
Address: RANEPA, Vernadskogo av., 82-1, Moscow, Russia, 119571.

### Abstract

The present situation in thinking research can be characterized as «methodological hunger», because the number of methods available is small, and they are hardly new. One of the main challenges in the field is the study of the structure of problem representation that plays a key role in thinking. The author discusses the limitations of existing methods for problem representation research and describes three studies of problem representation carried out within experimental and non-experimental settings. The studies used different tasks (problem classification, solution principle transfer, and description of solution structure) applied to algebra problems expressed in textual form. Several different methods were used to reveal the process of thinking. A modification of the «Yes–No» method involves varying the presence of certain structural elements of a problem in order to find out the specific elements used by participants to solve it. Higher competence was associated with larger number of types of problems successfully solved by participants. Usage of problems with similar structure organized in groups allows to study the contribution of specific structural elements of the problem to solution transfer. Creation of paradigms (classes of units grouped on a certain basis and yet logically opposed to each other) using equations with substantial meaning allows to evaluate the frequency of occurrence of each type of problem representation and to interpret the solution errors of different types. The new methods for thinking research can facilitate new theoretical and empirical research, contributing also to solution of classical problems in the field.

***Keywords:*** problem, problem-solving process, experimental and non-experimental methods, problem representation.

### References

Claparède, E. (1917). La psychologie de l'intelligence. *Scientia, 11*, 353–367.

Duncker, K. (1926). A qualitative (experimental and theoretical) study of productive thinking (solving of comprehensible problems). *Journal of Genetic Psychology, 33*, 642–708.

Fridman, L.M. (1977). *Logiko-psikhologicheskii analiz shkol'nykh uchebnykh zadach* [Logical and psychological analysis of school assignments]. Moscow: Pedagogika.

Gardner, H. (1985). *Psychology: The wedding of methods to substance*. In the mind's new science: A history of the cognitive revolution (Ch. 5). New York: Basic Books.

James, W. (1991). *Psikhologiia* [Psychology]. Moscow: Pedagogika.

Köhler, W. (1930). *Issledovanie intellekta chelovekoobraznykh obez'ian* [The mentality of apes]. Moscow.

Kotovsky, K., Hayes, J.R., & Simon, H.A. (1985). Why are some problems hard? Evidence from the tower of Hanoi. *Cognitive Psychology, 17*, 248–294.

Külpe, O. (1914). Sovremennaia psikhologiia myshleniia [Modern Psychology of Thinking]. *Novye idei v filosofii* [New ideas in philosophy], 16, 75–124.

Lévy-Bruhl, L. (1930). *Pervobytnoe myshlenie* [Primitive mentality]. Moscow.

Luchins, A.S. (1942). Mechanization in problem solving. *Psychological Monographs, 54*(6).

Luchins, A.S., & Luchins, E.H. (1950). New experimental attempts at preventing mechanization in problem solving. *Journal of General Psychology, 42*, 279–297.

Matyushkin, A.M. (1972). *Problemnye situatsii v myshlenii i obuchenii* [Problematic situations in thinking and in teaching]. Moscow: Pedagogika.

Metcalfe, J., & Wiebe, D. (1987). Intuition in insight and noninsight problem solving. *Memory and Cognition, 15*(3), 238–246.

Minsky, M. (1967). Na puti k sozdaniiu iskusstvennogo razuma [Artificial intelligence]. In *Vychislitel'nye mashiny i myshlenie* [Computers and thinking] (pp. 148–157). Moscow.

Newell, A., & Simon, H.A. (1972). *Human problem solving.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Newell, A., & Simon, H.A. (1961). Simulation of human thought. In *Current trends in psychological theory* (pp. 152–179). Pittsburgh, PA: University of Pittsburgh.

Newell, A., & Simon, H.A. (1965). *Imitatsiia myshleniia cheloveka s pomoshch'iu elektronnoi vychislitel'noi mashiny* [Computer simulation of human thinking] (pp. 457–474). Moscow.

Piaget, J. (1969). *Izbrannye proizvedeniia* [Sellected works]. Moscow.

Pylya, G. (1976). Matematicheskoe otkrytie. Reshenie zadach: osnovnye poniatiia, izuchenie i prepodavanie [Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving] (2nd ed.). Moscow.

Ponomarev, I.A. (1958). Razvitie printsipa resheniia zadachi [Development of a task solution principle]. *Doklady APN RSFSR* [Report from meeting of Academy of Pedagogical Sciences of Russia], 1.

Rehder, B. (1999). Detecting unsolvable algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 27*, 451–469.

Spiridonov, V.F. (2011). Naskol'ko ustoichiva psikhologicheskaia struktura tekstovoi zadachi po algebre? [How Stable is the Psychological Structure of a Textual Algebra Task?]. *Psychology. Journal of the Higher School of Economics, 8*(2), 138–147.

Spiridonov, V.F. (2006a). *Psikhologiia myshleniia: reshenie zadach i problem* [Psychology of thinking: problem-solving]. Moscow: Genezis.

Spiridonov, V.F. (2006b). *Funktsional'naia organizatsiia protsessa resheniia myslitel'noi zadachi* [Functional organization of the cognitive task solution process] (Doctoral dissertation), 2006.

Vygotsky, L.S. (1982). *Myshlenie i rech'. Sobranie sochinenii* [Thinking and speech. Collected works] (Vol. 2). Moscow: Pedagogika.

Weaver, C.A., & Kintsch, W. (1992). Enhancing students' comprehension of the conceptual structure of algebra word problems. *Journal of Educational Psychology, 84*, 419–428.

Wertheimer, M. (1987). *Produktivnoe myshlenie* [Productive thinking]. Moscow: Progress.

Zaliznyak, A.A. (2002). *«Russkoe imennoe slovoizmenenie» s prilozheniem izbrannykh rabot po sovremennomu russkomu iazyku i obshchemu iazykoznaniiu* [«Russian nominal inflection» with additional selected works on contemporary Russian language and general linguistics]. Moscow: Iazyki slavianskoi kul'tury [Languages of slavic culture].